AIR MP 95 (1er - coef 13)
4 heures

Problème

On se propose dans ce problème d'étudier quelques propriétés de l'application $(n,\alpha) \to x_n(\alpha)$ ou $(n,\alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ et $x_n(\alpha)$ vérifie :

$$\int_0^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n} dt = \alpha$$

On posera, pour tout entier naturel n et tout réel $t \geq 0$:

$$f_n(t) = \frac{e^t}{1+t^n}$$

La partie III est dans une large mesure indépendante des deux premières parties du problème.

Partie I : Etude de la suite des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

I-1 On supposera dans cette question $n \geq 3$.

(a) Montrer que la dérivée $D(f_n)$ de la fonction f_n s'annulle 2 fois sur $[0,+\infty[$ en α_n et β_n tels que $0 < \alpha_n < 1$ et $n-1 < \beta_n$.

Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0,+\infty[$.

(b) Montrer que $\beta_n < n$, puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} f_n(\beta_n)$.

(c) Montrer que $(\alpha_n)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n)$.

I-2 Dans cette question $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction g que l'on précisera.

(b) Etudier la position relative des graphes des fonctions f_n, f_{n+1} et g.

(c) Représenter sur une même figure les graphes de f_n et de g, pour n grand.

(d) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?

I-3 Soit $A \in \mathbb{R}_+$ un réel fixé. En citant précisément le théorème utilisé et en en vérifiant les hypothèses, déterminer la limite pour $n \to +\infty$ de la suite $\int_0^A \frac{e^t}{1+t^n} dt$.

Partie II : La suite $(x_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$

II-1 Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé.

(a) Démontrer que pour tout réel $\alpha \geq 0$ donné, il existe un et un seul $x_n(\alpha) \geq 0$ tel que :

$$\int_0^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n} dt = \alpha$$

(b) Préciser le sens de variation de la fonction $x_n : \alpha \to x_n(\alpha)$ ainsi que sa limite en $+\infty$.

II-2 Montrer que $x_n : \alpha \to x_n(\alpha)$ est de classe C^1 puis de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$.

Montrer de plus que la fonction x_n est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$y' = \frac{1}{f_n(y)}$$

II-3 Démontrer que pour $n \geq 3$, le graphe de x_n possède deux points d'inflexions a_n et b_n dont on exprimera les abscisses respectivement en fonction de α_n et β_n sous forme d'une intégrale.

II-4 Dans cette question le réel α est fixé tel que $\alpha > e-1$.

(a) Soit $A > 1$ un réel quelconque : à l'aide de la question **I-3**, déterminer la limite de $I_n = \int_A^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n} dt$ lorsque $n \to +\infty$.

(b) En déduire en revenant à la définition d'une limite, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n(\alpha) = +\infty$.

II-5 Dans cette question α est fixé tel que $\alpha < e-1$.

(a) Démontrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $x_n(\alpha) < 1$ (on raisonnera par l'absurde).

(b) Etudier le sens de variation de la suite $x_n(\alpha)$ à partir du rang N. En déduire que la suite $(x_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note l sa limite.

(c) Démontrer l'inégalité pour $n \geq N$:

$$\left| \int_l^{x_n(\alpha)} f_n(t) dt \right| \leq e \left| x_n(\alpha) - l \right|$$

En déduire la valeur de l à l'aide de la question **I-3**.

Partie III : Etude du cas particulier $\alpha = e-1$

III-1 En utilisant le résultat connu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

III-2 Soit $\alpha \in]0,1[$. On pose pour $x > 0$:

$$u(x) = x \int_\alpha^1 \ln(1+t^x) dt$$

(a) Démontrer que $u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(1-\alpha^{kx+1})x}{k(kx+1)}$.

(b) Calculer la limite de $u(x)$ pour $x \to +\infty$.

III-3 $\alpha \in [0,1[$ est donné. Soit f une application de $[\alpha,1[\to \mathbb{R}$ de classe C^n, où n sera successivement égal à 0 et 1.

(a) On suppose $n = 0$. Calculer la limite pour $x \to +\infty$ de $x \to \int_\alpha^1 t^x f(t) dt$.

(b) On suppose $n = 1$. Déterminer, pour tout entier $k \geq 1$, la limite pour $x \to +\infty$ de $x \to x \int_\alpha^1 t^{kx} f(t) dt$.

(c) On suppose $n = 1$. Etablir en s'inspirant des méthodes de la question **III-2** que :

$$\lim_{x\to+\infty} x\int_a^1 \ln(1+t^x)f(t)dt = \frac{\pi^2}{12}f(1)$$

III-4 Dans cette question, f est une application de classe C^1 sur $[a,b]$, $0 \le a < b$. On pose :

$$I_n = \int_a^b \frac{t^n f(t)}{1+t^n}dt$$

(a) On suppose $b < 1$. Montrer que pour tout entier $p \ge 0$, $\lim_{n\to+\infty} n^p I_n = 0$.

(b) On suppose $b = 1$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$I_n = \frac{f(1)\ln(2)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2}\frac{\pi^2}{12} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)$$

(c) On suppose $a \ge 1$. Déduire des cas précédents l'existence de deux constantes λ et μ telles que :

$$I_n = \int_a^b f(t)dt + \frac{\lambda}{n} + \frac{\mu}{n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)$$

Indication : On pourra effectuer un changement de variable dans $\int_a^b \frac{f(t)}{1+t^n}dt$.

Exprimer ces constantes dans le cas $a = 1$ en fonction de $f(1)$ et $f'(1)$.

(d) En déduire que si $a < 1 < b$,

$$I_n = \int_1^b f(t)dt - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2}\frac{\pi^2}{6} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)$$

III-5 Déterminer, suivant les valeurs du réel γ trois constantes λ_1, λ_2, λ_3 telles que :

$$\int_0^\gamma \frac{e^t}{1+t^n}dt = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{n} + \frac{\lambda_3}{n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)$$

III-6 *Calcul de* $\lim_{n\to+\infty} x_n(\alpha)$ *lorsque* $\alpha = e-1$. On suppose ici $\alpha = e-1$.

(a) Soit $A \ge 1$. Donner un équivalent de $\int_A^{x_n(\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n}dt$ (on distinguera $A > 1$ et $A = 1$).

(b) En déduire la limite de la suite $x_n(\alpha)$ pour $n \to +\infty$.

III-7 On suppose $0 \le \alpha < e-1$. Démontrer la relation :

$$x_n(\alpha) - \ln(\alpha+1) = o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)$$